

DOI 10.51558/2490-3647.2023.8.1.419

UDK 373.2-053.4:51

Primljeno: 09. 01. 2023.

Pregledni rad
Review paper

Amela Mujagić, Karmelita Pjanić-Lipovača, Edin Liđan

MATEMATIČKE KOMPETENCIJE U RANOM DJETINJSTVU I KLJUČNI FAKTORI ZA NJIHOV RAZVOJ

Cilj ovog rada je analizirati i sistematizirati spoznaje koje proizlaze iz recentnih znanstvenih istraživanja ranih matematičkih kompetencija, izdvojiti vještine i kompetencije koje su prediktivne za kasnije postignuće u matematici te prikazati karakteristike okruženja koje su poticajne za njihov razvoj u odgojno-obrazovnom i porodičnom kontekstu. Rezultati prikazanih longitudinalnih istraživanja jasno ukazuju da djeca koja pri polasku u školu imaju više razine matematičkih kompetencija iskazuju i viša postignuća u matematici tokom osnovne škole, a osobito su prediktivne numeričke kompetencije. Za razvoj ovih kompetencija je neophodna kvalitetna interakcija odrasli-dijete u kojoj roditelji i odgajatelji koriste svakodnevne situacije i zajedničke igre kako bi kroz razgovor potakli otkrivanje, zaključivanje i općenito rezoniranje o količinama, veličinama, relacijama, brojnosti, oblicima, obrascima itd. Nalazi su razmotreni i u kontekstu Bosne i Hercegovine u kojoj je izuzetno mali dio djece obuhvaćen predškolskim odgojem i obrazovanjem.

Ključne riječi: rane matematičke kompetencije; numeričke kompetencije; postignuće u matematici; rano učenje matematike

1. UVOD

Protetkli nekoliko desetljeća razvoj ranih matematičkih kompetencija je bio u fokusu interesa istraživača u području obrazovanja čemu svjedoči izuzetno veliki broj objavljenih empirijskih radova.¹ Ovaj interes potaknut je, između ostalog, prepoznavanjem važnosti matematičke pismenosti u savremenom društvu i na tržištu rada, rezultatima brojnih istraživanja koja pokazuju da znatan dio učenika ne razvija s la-koćom matematičke kompetencije, kao i rezultatima istraživanja koja ukazuju na prediktivnu ulogu matematičkih kompetencija razvijenih prije polaska u školu za kasnije postignuće u matematici. Cilj ovog rada je prikazati najvažnije nalaze recentnih istraživanja koja su se bavila efektima razvoja matematičkih kompetencija u ranom djetinjstvu (predškolski uzrast) na kasnija postignuća učenika te identificirati ključne faktore koji doprinose razvoju ranih matematičkih kompetencija djece u formalnom (obrazovnom) i neformalnom (porodičnom) okruženju².

2. RANE MATEMATIČKE KOMPETENCIJE

Pojmom ranih matematičkih kompetencija obuhvaćene su kompetencije općeg razumijevanja brojeva i osnovnih matematičkih koncepata koje se razvijaju prije polaska u školu, odnosno tokom ranog djetinjstva te u prvim godinama školovanja. Odgovor na pitanje šta sve čini rane matematičke kompetencije ponuđen je u nekoliko teorijskih modela koji se razlikuju s obzirom na obuhvat uzrasta djece u kojem opisuju razvoj ovih kompetencija. Iako se osnove matematičkih kompetencija (nesimboličke, nenumeričke kompetencije) javljaju već u prvoj godini života (Feigenson i sar. 2004), većina teorijskih modela usmjerena je na opis numeričkih / simboličkih kompetencija koje se počinju razvijati u ranom djetinjstvu (od otprilike treće godine života). Tako, na primjer, Fritz i sar. (2013) predlažu hijerarhijski model prema kojem se ključni numerički koncepti i aritmetičke vještine razvijaju kroz šest razina. Model je hijerarhijski jer pretpostavlja da su kompetencije nižih razina neophodne za razvoj kompetencija na višoj razini. Prema ovom modelu numeričke kompetencije na prvoj razini (nazivi brojeva i prebrojavanje), koje se razvijaju od četvrte godine, uključuju mogućnosti brojanja (u smislu recitiranja naziva brojeva) i prebrojavanja manjeg skupa

-
1. Na dan 23. 5. 2022. pretraživanje samo ERIC baze prema ključnim pojmovima *early mathematics learning or early mathematics acquisition or early mathematics education*, uz ograničenje na recenzirane radove (peer reviewed) i na predškolski uzrast rezultira prikazom 5566 radova u posljednjih 10 godina.
 2. Rad je nastao u okviru projekta *Making early mathematics learning available and fun*.

objekata. Razumijevanje koncepta broja omogućava djeci da povežu naziv svakog broja u nizu sa individualnim objektima, što je manifestacija korespondencije jedan-na-jedan.

Razine ne bi trebale biti izdvojene u zasebne paragrafe jer se radi o prikazu dva modela u jednom paragrafu (zaokružena cjelina). Na drugoj razini (mentalna brojeva linija) djeca počinju razumijevati da su brojevi u nizu povezani sa povećanjem brojnosti. Drugim riječima, prepoznaju da brojevi koji dolaze kasnije u nizu označavaju „više“ što im omogućava poređenje brojeva na osnovu njihovog položaja u brojevnom nizu (mogu odgovoriti na pitanje koji broj je veći 4 ili 5). To im također omogućava rješavanje jednostavnih problema sabiranja i oduzimanja koje rješavaju „brojanjem unaprijed“. Na trećoj razini (kardinalnost i raščlanjivanje), razvija se razumijevanje da brojevi označavaju količinu. Razumijevanje kardinalnosti ne razvija se spontano i zahtijeva poučavanje, jednako kao i razvoj kompetencija na ostalim razinama (4. razina inkluzija klasa, 5. relacije, 6. jedinice u brojevima) a koje se razvijaju u okviru formalnog školovanja. Sarama i Clements (2009) predlažu model temeljen na teoriji i istraživanjima učenja i poučavanja u ranom djetinjstvu u kojem su rane matematičke kompetencije razvrstane u 4 kategorije: (1) kvantitet, broj i brzo imenovanje brojnosti; (2) verbalno brojanje i prebrojavanje, (3) poređenje, serijacija i procjena; (4) aritmetika: sabiranje i oduzimanje. Aunio i Räsänen (2016) u svom modelu također razmatraju 4 osnovna područja ključnih numeričkih vještina: (1) nesimboličko i simboličko razumijevanje brojeva, (2) razumijevanje matematičkih relacija, (3) vještine prebrojavanja i (4) osnovne aritmetičke vještine. Prvom skupinom su obuhvaćene najranije kompetencije koje se odnose na vještine prepoznavanja brojnosti (bez prebrojavanja), približne reprezentacije količina, poređenja količina i prepoznavanja obrazaca. Drugo područje uključuje vještine poređenja, klasifikacije, serijacije, razumijevanja i upotrebe korespondencije jedan-na-jedan te načela ordinalnosti i kardinalnosti. Vještine prebrojavanja uključuju poznavanje simbola brojeva, slijeda brojeva i prebrojavanja konkretnih objekata. Konačno, četvrto područje je operacionalizirano kao mogućnost razumijevanja i primjene principa komutativnosti, asocijativnosti i inverzije i rješavanja jednostavnih zadataka sabiranja i oduzimanja.

Iz ovog ograničenog prikaza samo nekoliko teorijskih modela (za detaljan prikaz v. Hellstrand 2021) može se zaključiti da se, uprkos donekle različitim načinima klasifikacije (i teorijskim polaznim osnovama modela), modeli zapravo malo razlikuju po pitanju šta to čini rane matematičke (numeričke) kompetencije. Ključne matematičke kompetencije u ranom djetinjstvu uključuju, dakle, nesimboličko znanje o količinama koje ne zahtijeva poznavanje naziva ili simbola brojeva i numeričku

pismenost koja uključuje brojanje i prebrojavanje, simboličko mapiranje (numeričke relacije) i aritmetičke operacije. Osim toga, u nekim teorijskim modelima (npr. Aunio i Räsänen 2016) i istraživanjima (npr. Mulligan i sar. 2020) se naglašava i uloga kompetencija u vezi sa uočavanjem i manipulacijom obrascima i strukturama, poznavanje i manipulacija geometrijskim likovima i tijelima te vještine mjerenja.

3. RANE MATEMATIČKE KOMPETENCIJE I ŠKOLSKA POSTIGNUĆA

Istraživanja povezanosti ranih (numeričkih) matematičkih kompetencija i kasnijeg postignuća u matematici i školi općenito su zaista mnogobrojna i raznovrsna. Znatan broj ovih istraživanja bavi se longitudinalnim ispitivanjem povezanosti matematičkih kompetencija pri polasku u školu ili neposredno prije polaska u školu i kasnijeg uspjeha učenika u matematici. Budući da su kognitivne sposobnosti najdosljedniji prediktor školskog postignuća općenito, pa tako i postignuća u matematici, većina istraživanja kontrolira njihove efekte pri analizi povezanosti ranih matematičkih kompetencija i kasnijeg postignuća u matematici. Na primjer, Lê i Noël (2021) su pokazali da su vještine brojanja pri polasku u školu prediktivne za vještine sabiranja dvije godine kasnije (uz kontrolu kognitivnih sposobnosti). Jordan i sar. (2009) su pratili skupinu djece od pete godine do kraja trećeg razreda i pokazali da je procjena ranih kompetencija u prvom mjerenju prediktivna za uspjeh u matematici na kraju trećeg razreda. Slično tome, Nguyen i sar. (2016) nalaze da su vještine brojanja prije polaska u školu najснаžniji prediktor postignuća u matematici u petom razredu. Watts i sar. (2014) nalaze da su predškolske matematičke kompetencije prediktivne za matematičke vještine čak do petnaeste godine i to uz kontrolu kognitivnih sposobnosti i porodičnih okolnosti. Općenito, može se zaključiti da su rane numeričke kompetencije poput brojanja, brzog imenovanja brojnosti, prebrojavanja i jednostavnog sabiranja prediktivne za kasnije učenje i postignuće u matematici. Osim toga, ove rane matematičke kompetencije su prediktivne i za opće školsko postignuće. Duncan i sar. (2007) su analizirali 6 longitudinalnih istraživanja i zaključili da je, uz kontrolu kognitivnih sposobnosti, najснаžniji prediktor školskog postignuća razina matematičkih vještina pri polasku u školu, a kao najважnije kompetencije identificirane su poznavanje brojeva i načela ordinalnosti.

Pored prethodno navedenih numeričkih kompetencija, analizirana je i prediktivna uloga nenumeričkih kompetencija poput nesimboličkog (nenumeričkog) upoređivanja količina te uočavanja obrazaca i struktura. Kad je riječ o uočavanju obrazaca i struk-

tura, jedna od rijetkih longitudinalnih studija (Rittle-Johnson i sar. 2015) pokazala je da je mogućnost uočavanja obrazaca u predškolskom uzrastu prediktivna za postignuće u matematici u petom razredu. Iako su longitudinalne studije uloge ove rane matematičke kompetencije rijetke, niz intervencijskih studija u kojima su djeca predškolske dobi poučavana obrascima, pokazuje da djeca iz intervencijskih skupina imaju viša postignuća u matematici u prvim razredima osnovne škole (npr. Mulligan i sar. 2020, Papic i sar. 2011). Nesimboličko (nenumeričko) poznavanje količina se odnosi na procjenu i poređenje skupova objekata bez upotrebe imena ili simbola brojeva. Chen i Li (2014) na osnovu metanalize transverzalnih i longitudinalnih studija zaključuju da je nenumeričko poznavanje i manipuliranje količinama prediktivno za kasnije postignuće u matematici. Prediktivnu ulogu ove kompetencije potvrđuje i metanaliza koju su proveli Schneider i sar. (2017), no njihovi rezultati ukazuju i na snažniju prediktivnu ulogu vještina numeričkog (simboličkog) poređenja u odnosu na nesimboličko.

Imajući u vidu velike razlike u kompleksnosti matematičkih sadržaja i kompetencija koje se razvijaju u toku školovanja, postavlja se pitanje zašto su rane, osobito numeričke, vještine i kompetencije toliko prediktivne za kasnije postignuće u matematici. Prema jednom od mogućih objašnjenja učenici koji ulaze u školu sa višom razinom kompetencija koriste te kompetencije i vještine za dalju izgradnju istih (Watts i sar. 2014) jer se učenje (matematike) smatra kumulativnim procesom (Sarama i Clements 2009). Ovo objašnjenje nije dovoljno zbog razlika u iskustvima učenja matematike, načinima poučavanja, motivacijskim faktorima itd.

Drugo moguće objašnjenje uzima u obzir ulogu izvršnih funkcija koje uključuju sposobnost zadržavanja i ažuriranja informacija u radnom pamćenju, inhibiranja automatskih ili dominantnih odgovora i fleksibilnosti pažnje. Razvoj izvršnih funkcija tokom ranog djetinjstva manifestira se u sve većoj sposobnosti djece da rješavaju sve složenije zadatke i omogućava im razvoj sve složenijih matematičkih vještina. Izvršne funkcije pomažu učenju matematike i neka istraživanja pokazuju da snaga veze između ranih matematičkih kompetencija i kasnijeg postignuća varira ovisno o razini ranih izvršnih funkcija (Ribner 2020; ten Braak i sar. 2022).

Sljedeći potencijalni razlog snažne veze između ranih kompetencija i kasnijeg postignuća u matematici može se naći u efektima rane samoefikasnosti za učenje matematike i samopoimanja u matematici (Arens i sar. 2022, Parker i sar. 2014). Naime, istraživanja dosljedno pokazuju da su područno specifično samopoimanje i samoefikasnost važni prediktori uspjeha u datom području (npr. Skaalvik i Skaalvik 2008). Djeca koja rano doživljavaju uspjeh u savladavanju matematike (zahvaljujući ranim

kompetencijama) razvijaju samoefikasnost zahvaljujući kojoj se lakše upuštaju u savladavanje novih zadataka (za razliku od onih učenika koji rano razvijaju nisku samoefikasnost te odustaju).

Neki autori smatraju i da je dugoročna prediktivna uloga ranih matematičkih kompetencija za kasnije postignuće precijenjena uglavnom zbog stabilnih individualnih i okolinskih razlika koje u longitudinalnim studijama nisu kontrolirane (Bailey i sar. 2014; Watts i sar. 2018). Na primjer, u posljednjih nekoliko decenija posebna pažnja je posvećena i istraživanju dječije spontane tendencije fokusiranja na brojnost, na kvantitativne relacije i na matematičke obrasce i strukture (Verschaffel i sar. 2020). Čini se da se djeca međusobno razlikuju po tome šta uočavaju u svakodnevnim situacijama, odnosno da postoje relativno stabilne individualne razlike u sklonosti uočavanja brojnosti, kvantitativnih relacija te obrazaca i struktura. Individualne razlike u spontanom fokusiranju na brojnost, koje se mogu uočiti već kod trogodišnjaka, recipročno su povezane sa matematičkim vještinama tokom ranog djetinjstva (Hannula i Lehtinen 2005) ali i kasnije (McMullen i sar. 2015). U longitudinalnoj studiji McMullen i sar. (2016) dokumentirali su individualne razlike i u spontanosti tendenciji fokusiranja na kvantitativne relacije te ukazali na njenu prediktivnu ulogu za konceptualno razumijevanje racionalnih brojeva dvije godine kasnije. Konačno, Wijns i sar. (2020) su analizirali ulogu spontanog fokusiranja na obrasce i strukture i pokazali da petogodišnjaci koji se spontano fokusiraju na obrasce imaju bolje razvijene matematičke kompetencije od onih koji zanemaruju obrasce.

Mehanizmi zahvaljujući kojima su rane matematičke kompetencije povezane sa kasnijim postignućem u matematici nisu, dakle, u potpunosti razjašnjeni niti je slika svih mogućih uključenih razloga potpuna. Ipak, njihova povezanost je nedvojbeno potkrijepljena brojnim istraživanjima (od kojih su samo neka prikazana u prethodnom tekstu). Iz perspektive obrazovanja važno je ne samo znati koje su to rane matematičke kompetencije prediktivne za dalji razvoj ovih kompetencija u školi nego i na koje načine ih je moguće razvijati u predškolskom periodu. Odgovor na ovo pitanje je moguće nazrijeti kroz zaključke istraživanja koja su se bavila analizom karakteristika predškolskog obrazovanja i porodičnih okruženja poticajnih za razvoj ranih matematičkih kompetencija.

4. RAZVOJ RANIH MATEMATIČKIH KOMPETENCIJA U PREDŠKOLSKOM I PORODIČNOM OKRUŽENJU

Rane matematičke kompetencije, poput brojanja, prepoznavanja simbola brojeva, poređenja veličina, opisivanja oblika i prostornih odnosa, rješavanja jednostavnih problema razvijaju se u predškolskim ustanovama kroz pažljivo osmišljene usmjerene aktivnosti. Međutim, jednako važno (ako ne i važnije) je da svakodnevne (neusmjerene) aktivnosti i situacije mogu biti iskorištene za dalje učenje. Gasteiger (2012) posebno ističe važnost spontanih prilika za učenje. Na primjer, brojanje i prebrojavanje mogu se vježbati prilikom postavljanja stola za ručak, pri dolasku djece u vrtić. Ili, iskustvo s mjerenjem se može razvijati kroz aktivnosti kuhanja, odbrojavanja vremena do početka neke aktivnosti. Prostorna orijentacija se razvija razgovorom i opisivanjem pozicija ili putanje. Slobodna igra djece je također bogata prilikama za učenje matematičkih koncepata. Sve ove i mnoge druge situacije predstavljaju prilike za razmišljanje, komunikaciju i primjenu matematičkog mišljenja. Ipak, kada se govori o učenju matematike u svakodnevnim situacijama i u igri, onda to ne znači da će djeca sama učiti iz svojih aktivnosti. Važno je da odgajatelji prepoznaju matematičke aspekte svakodnevnih situacija, dječijih interakcija, aktivnosti i igre te da ih iskoriste kako bi kroz razgovor, postavljanje pitanja, refleksiju i zajedničku konstrukciju značenja tih situacija vodili dječiji razvoj ranih matematičkih kompetencija. Siraj-Blatchford i sar. (2002) su pokazali da se upravo po korištenju spontanih prilika za zajedničko otkrivanje, razmišljanje, zaključivanje, konstrukciju i proširivanje znanja razlikuju najuspješniji od ostalih predškolskih programa. Istovremeno, zaključili su da odgajatelji zapravo rijetko koriste ove prilike. Dunekacke i sar. (2015) su pokazali da vještine odgajatelja da uoče i iskoriste ove spontane prilike za učenje ovise o njihovom obrazovanju i kompetencijama. Analiza koju su proveli Siraj-Blatchford i sar. (2002) također pokazuje da su područne kompetencije odgajatelja i razumijevanje pojedinih područja kurikulumuma jednako važni u predškolskom obrazovanju kao i u kasnijim stadijima obrazovanja. Prema Gasteiger (2012), u kontekstu ranog matematičkog obrazovanja kompetencije odgajatelja ogledaju se upravo u adekvatnom reagiranju u svakodnevnim situacijama na temelju poznavanja područja matematike.

Važnost korištenja spontanih prilika za proširivanje znanja i razvoj ranih kompetencija uočava se i u istraživanjima porodičnih okolnosti važnih za razvoj matematičkih kompetencija. Istraživanja, naime, pokazuju da su aktivnosti u porodičnom okruženju koje uključuju matematičko rezoniranje povezane sa razinom matematičkih kompetencija. Analogno razlikovanju usmjerenih i neusmjerenih aktivnosti u pred-

školskim ustanovama, u ovim istraživanjima se najčešće razlikuju tzv. formalne i neformalne numeričke/matematičke aktivnosti. Formalne uključuju eksplicitno poučavanje numeričkim konceptima, poput npr. brojanja i prebrojavanja, dok neformalne aktivnosti podrazumijevaju svakodnevna "slučajna" iskustva s matematičkim konceptima poput onih koja djeca stižu tokom kupovine, pripremanja hrane, igranja društvenih igara na pločama, igara koje uključuju karte, kockice, domine, igara gradnje kockama ili u drugim konstruktivnim igrama (Clerkin i Gilligan 2018). Skwarchuk i sar. (2014) su na osnovu roditeljskih izvještaja o zajedničkim aktivnostima s djecom i procjene dječijih matematičkih kompetencija pokazali da formalne aktivnosti s djecom predviđaju dječije numeričke kompetencije, dok neformalna izloženost igrama s numeričkim sadržajima predviđa nesimboličke kompetencije. Purpura i sar. (2020) na osnovu svog istraživanja zaključuju da su i formalne i neformalne aktivnosti (ili kako ih oni nazivaju direktne i indirektne) prediktivne za numeričke vještine, poznavanje matematičkog jezika i prostorne vještine, dok Ramani i Siegler (2015) posebno ističu važnost neformalnih aktivnosti za razvoj numeričkih kompetencija. Na kraju, Clerkin i Gilligan (2018), na osnovu sekundarne analize podataka prikupljenih u okviru TIMSS 2011 istraživanja na uzorku učenika i roditelja iz Irske, zaključuju da je učestalost uključenosti djece u numeričke igre u predškolskoj dobi (na osnovu procjene roditelja) povezana ne samo s postignućem nego i sa samopouzdanjem i interesom za matematiku u trećem razredu osnovne škole. Razvoj matematičkih kompetencija nije dakle samo posljedica generičkih razvojnih aktivnosti (kao što je interakcija roditelja i djece dok čitaju priče). Porodična okolina poticajna za razvoj matematičkih kompetencija kreira se dostupnošću materijala i igraćaka koje omogućavaju usvajanje matematičkih konceptata i aktivnom uključenosti roditelja u dječiju igru i razgovor o matematičkim aspektima svakodnevnih iskustava (Segers, Klemans i Ludo 2015). Kvantitet i kvalitet interakcija roditelji-djeca koje uključuju matematičko rezoniranje ključni su za ovaj aspekt razvoja.

Posebna skupina istraživanja bavila se analizom efekata neformalnih aktivnosti koje uključuju različite vrste igara na razvoj matematičkih kompetencija u ranom djetinjstvu. Ramani i Siegler (2015) zaključuju da uobičajene društvene igre na ploči (poput "Čovječe ne ljuti se"), a čija se suština sastoji u pomjeranju figurica za određeni broj polja ovisno o broju dobijenom na igraćoj kocki povoljno djeluju na razvoj ranih numeričkih kompetencija. Ove igre imaju prednost (bolje efekte) od igara na ploči koje se igraju sa kockicama na kojima se umjesto tačkica (koje označavaju brojnost) nalaze boje ili neki drugi simboli (Gasteiger i sar. 2015). Gasteiger (2012) smatra da igre na ploči pružaju brojne mogućnosti za učenje brojanja, korespondencije

jedan-na-jedan, relacija dio-cjelina. Pored igara na ploči, niz drugih igara/igračaka pruža priliku za razvoj numeričkih reprezentacija količina. Na primjer, obične igraće karte istovremeno prikazuju i simboličku (u formi arapskih brojeva) i nesimboličku (kao set objekata: npr. srce) reprezentaciju broja. Općenito, istraživanja pokazuju da su za poticanje numeričkih kompetencija osobito pogodne one igre/igračke koje uključuju više načina prikazivanja brojnosti (simbol broja i odgovarajući broj objekata) (npr. Ramani i Siegler 2008). Pored klasičnih igara (igre na ploči, karte, domine), djeci su danas dostupne i brojne računalne igre koje mogu igrati na računalima, tabletima ili pametnim telefonima. Ramani i sar. (2019) zaključuju da su i tradicionalne i računalne igre koje su dizajnirane da usmjere pažnju djece na numeričke informacije efikasne u poticanju ranih numeričkih kompetencija.

5. ZAKLJUČAK

Prethodno prikazani rezultati empirijskih istraživanja upućuju na tri opća zaključka. Najprije, rane matematičke, a osobito numeričke, kompetencije važna su osnova za dalji razvoj ovih kompetencija u okviru formalnog školovanja. Djeca koja pri polasku u školu posjeduju više razine ovih kompetencija imaju viša postignuća u matematici. Drugi zaključak koji se može izvesti jeste da je za razvoj ovih kompetencija neophodna kvalitetna interakcija odrasli-dijete koja uključuje razgovor o matematičkim aspektima svakodnevnih situacija. Roditelji i odgajatelji koji koriste svakodnevne situacije da bi kroz razgovor potakli otkrivanje, zaključivanje i općenito rezoniranje o količinama, veličinama, relacijama, brojnosti, oblicima, obrascima itd. ključni su za razvoj matematičkih kompetencija u ranom djetinjstvu. Konačno, brojne, danas većini djece dostupne igre na ploči, karte, domine, *memory* i sl. u tradicionalnom ili računalnom obliku, mogu biti poticajne za razvoj različitih matematičkih kompetencija. Važno je istaknuti da prethodno izneseni zaključci slijede iz istraživanja koja su uglavnom provedena u evropskom i američkom kulturalnom i obrazovnom okruženju. No, s obzirom na univerzalnost razvojnih karakteristika djece ovog uzrasta, generalizacija ovih rezultata i na druge prostore i sredine čini se opravdanom. Nažalost, na području Bosne i Hercegovine nema istraživanja koja se bave ranim matematičkim kompetencijama ili bar autorima ovog rada nisu poznata. Ono što je poznato jeste da učenici u Bosni i Hercegovini već u trećem razredu osnovne škole znatno zaostaju za svojim vršnjacima u pogledu postignuća u matematici čemu svjedoče rezultati međunarodnih istraživanja (APOS0, IEA 2021). Možemo se zapitati da li se korijen ovakvih postignuća može pronaći u ranim matematičkim kompetencijama?

Imajući u vidu sve veću zauzetost roditelja u poslovnom svijetu koji sve manje vremena provode s djecom ali i razlike u roditeljskim kompetencijama i sklonostima za poticanje matematičkog rezoniranja kod djece (bez obzira na to koliko vremena provode s njima) ključna uloga u razvoju matematičkih (i drugih) kompetencija kod djece u ranom djetinjstvu može se pripisati odgajateljima u predškolskim ustanovama. Nažalost, uključenost djece u predškolski odgoj i obrazovanje u Bosni i Hercegovini je izuzetno niska (prema nekim procjenama svega desetak posto ukupnog broja djece, pri čemu je obuhvat djece iz ruralnih sredina manji od 1%, Ministarstvo civilnih poslova BiH 2016). Osim toga, samo pohađanje predškolske ustanove ne podrazumijeva nužno i kvalitetan rad na razvoju ranih matematičkih kompetencija. Stoga se, umjesto konačnog zaključka ovog rada, u kontekstu Bosne i Hercegovine nameće nekoliko otvorenih pitanja. Koliko je u praksi predškolskih ustanova vremena i pažnje posvećeno razvoju ranih matematičkih kompetencija općenito i u odnosu na ostala razvojna područja? Koliko su odgajatelji kompetentni u prepoznavanju prilika za razvoj ranih matematičkih kompetencija u slobodnoj igri djece i svakodnevnim situacijama i koliko ih koriste? Koliko su uopće razvijene rane matematičke kompetencije kod djece predškolskog uzrasta u BiH? Da li djeca koja pohađaju vrtić imaju više razine ovih kompetencija od one koja ga ne pohađaju? Potraga za odgovorima na ova pitanja zahtijeva kvalitetan empirijski pristup, a prikupljeni podaci i odgovori bi mogli pružiti smjernice za unapređenje rada i profesionalnog usavršavanja odgajatelja.

LITERATURA

1. APOSO, IEA (2021), *TIMSS 2019 Report for Bosnia and Herzegovina*; dostupno na: <https://aposo.gov.ba/sadrzaj/uploads/TIMSS-2019-izvje%C5%A1taj-za-BiH-engleski-jezik-f-i-n-a-l.pdf>
2. Arens, Katrin A., Anne C. Frenzel, Thomas Goetz (2022), "Self-Concept and Self-Efficacy in Math: Longitudinal Interrelations and Reciprocal Linkages with Achievement", *The Journal of Experimental Education*, 90(3), 615–633.
3. Aunio, Pirjo, Pekka Räsänen (2016), "Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators", *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704,
4. Bailey, Drew H., Tyler W. Watts, Andrew K. Littlefield, David C. Geary (2014), "State and trait effects on individual differences in children's

- mathematical development", *Psychological Science*, 25(11), 2017–2026.
5. Chen, Qixuan, Jingguang Li (2014), "Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis", *Acta Psychologica*, 148, 163–172.
 6. Clerkin, Aidan, Katie Gilligan (2008), "Pre-school numeracy play as a predictor of children's attitudes towards mathematics at age 10", *Journal of Early Childhood Research*, 16(3), 319–334.
 7. Duncan, Greg J., Chantelle J. Dowsett, Amy Claessens, Katherine Magnuson, Aletha C. Huston, Pamela Klebanov, Linda S. Pagani, Leon Feinstein, Mimi Engel, Jeanne Brooks-Gunn, Holly Sexton, Kathryn Duckworth, Crista Japel (2007), "School readiness and later achievement", *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446.
 8. Dunekacke, Simone, Lars Jenßen, Sigrid Blömeke (2015), "Effects of Mathematics Content Knowledge on Pre-school Teachers' Performance: a Video-Based Assessment of Perception and Planning Abilities in Informal Learning Situations", *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 267–286.
 9. Feigenson, Lisa, Stanislas Dehaene, Elizabeth Spelke (2004), "Core systems of number", *TRENDS in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.
 10. Fritz, Annemarie, Antje Ehlert, Lars Balzer (2013), "Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding", *South African Journal of Childhood Education*, 3(1), 38–67.
 11. Gasteiger, Hedwig (2012), "Fostering Early Mathematical Competencies in Natural Learning Situations – Foundation and Challenges of a Competence-Oriented Concept of Mathematics Education in Kindergarten", *Journal für Mathematik-Didaktik* 33, 181–201.
 12. Gasteiger, Hedwig, Andreas Obersteiner, Kristina Reiss (2015), "Formal and Informal Learning Environments: Using Games to Support Early Numeracy", in: Joke Torbeyns, Erno Lehtinen, Jan Elenur (eds.), *Describing and studying domain-specific serious games*, Springer, 231–250.
 13. Hannula, Minna M., Erno Lehtinen (2005), "Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children", *Learning and Instruction*, 15(3), 237–256.
 14. Hellstrand, Heidi (2021), *Early Numeracy Development: Identifying and Supporting Children at Risk for Mathematical Learning Difficulties*, Åbo Akademis University Press, Turku, Finland

15. Jordan, Nancy C., David Kaplan, Chaitanya Ramineni, Maria N. Locuniak (2009), "Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes", *Developmental Psychology*, 45(3), 850–867.
16. Lê, Mai-Liên, Marie-Pascale Noël (2021), "Preschoolers' mastery of advanced counting: The best predictor of addition skills 2 years later", *Journal of Experimental Child Psychology*, 212, 105252
17. McMullen, Jake, Minna M. Hannula-Sormunen, Erno Lehtinen (2015), "Preschool spontaneous focusing on numerosity predicts rational number conceptual knowledge 6 years later", *ZDM Mathematics Education*, 47, 813–824.
18. McMullen, Jake, Minna M. Hannula-Sormunen, Earo Laakkonen, Erno Lehtinen (2016), "Spontaneous focusing on quantitative relations as a predictor of the development of rational number conceptual knowledge", *Journal of Educational Psychology*, 108(6), 857–868.
19. Ministarstvo civilnih poslova BiH (2016), *Platforma za razvoj predškolskog odgoja i obrazovanja u Bosni i Hercegovini za period 2017–2022*; dostupno na: <http://mcp.gov.ba/>
20. Mulligan, Joanne, Gabrielle Oslington, Lyn English (2020), "Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program", *ZDM Mathematics Education*, 52(4), 663–676.
21. Nguyen, Tutrang, Tyler Watts, Greg Duncan, Douglas Clements, Julie Sarama, Christopher Wolfe, Mary Spitler (2016), "Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement?", *Early Childhood Research Quarterly*, 36(1), 550–560.
22. Papic, Marina, Joanne Mulligan, Michael Mitchelmore (2011), "Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning", *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237–269.
23. Parker, Philip, Herb Marsh, Joseph Ciarrochi, Sarah Marshall, Adel Abduljabbar (2014), "Juxtaposing math self-efficacy and self-concept as predictors of long-term achievement outcomes", *Educational Psychology*, 34(1), 29–48,
24. Purpura David J., Yemimah A. King, Emily Rolan, Caroline Byrd Hornburg, Sara A. Schmitt, Sara A. Hart, Colleen M. Ganley (2020), "Examining the Factor Structure of the Home Mathematics Environment to Delineate Its Role in Predicting Preschool Numeracy, Mathematical Language, and Spatial Skills", *Frontiers in Psychology*, 11:1925

25. Siegler, Robert S., Geeta B. Ramani (2008), "Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development", *Developmental Science*, 11(5), 655–661.
26. Ramani, Geeta B., Robert S. Siegler (2015), "How informal learning activities can promote children's numerical knowledge", in: Roi Cohen Kadosh, Ann Dowker (eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition*, Oxford University Press, 1135–1153.
27. Ramani, Geeta B., Emily Daubert, Nicole Scalise (2019), "Role of play and games in building children's foundational numerical knowledge", in: David C. Geary, Daniel B. Berch, Kathleen Mann Koepke (eds.), *Cognitive foundations for improving mathematical learning*, 69–90, Elsevier Academic Press
28. Ribner, Andrew D. (2020), "Executive function facilitates learning from math instruction in kindergarten: Evidence from the ECLS-K", *Learning and Instruction*, 65, 101251
29. Rittle-Johnson, Bethany, Emily R. Fyfe, Abbey M. Loehr, Michael Miller (2015), "Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation", *Early Childhood Research Quarterly*, 31(2), 101–112.
30. Sarama, Julie, Douglas H. Clements (2009), *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge
31. Schneider, Michael, Cassandra Beeres, Leyla Coban, Simon Merz, Susan Schmidt, Johannes Stricker, Bert De Smedt (2017), "Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis", *Developmental Science*, 20(3), 1–16.
32. Segers, Eliane, Tijs Kleemans, Ludo Verhoeven (2015), "Role of Parent Literacy and Numeracy Expectations and Activities in Predicting Early Numeracy Skills", *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2-3), 219–236.
33. Siraj-Blatchford, Iram, Stella Muttock, Kathy Sylva, Rose Gilden, Danny Bell (2002), *Researching Effective Pedagogy in the Early Years*, Queen's Printer
34. Skaalvik, Einar M., Sidsel Skaalvik (2008), "Self-concept and self-efficacy in mathematics: Relation with mathematics motivation and achievement", in: Filip M. Olsson (ed.), *New developments in the psychology of motivation*, Nova Science Publishers, 105–128.
35. Skwarchuk, Shery-Linn, Carla Sowinski, Jo-Anne LeFevre (2014), "Formal and informal home learning activities in relation to children's early numeracy

- and literacy skills: The development of a home numeracy model", *Journal of Experimental Child Psychology*, 121, 63–84.
36. ten Braak, Dieuwer, Ragnhild Lenes, David J. Purpura, Sara Schmitt, Ingun Størksen (2022), "Why do early mathematics skills predict later mathematics and reading achievement? The role of executive function", *Journal of Experimental Child Psychology*, 214, 105306
37. Verschaffel, Lieven, Sanne Rathé, Nore Wijns, Tine Degrande, Wim Dooren, Bert De Smedt, Joke Torbeyns (2020), "Young Children's Early Mathematical Competencies: The Role of Mathematical Focusing Tendencies", in: Martin Carlsen, Ingvald Erfjord, Per Sigurd Hundeland (eds.), *Mathematics Education in the Early Years*, Springer, 23–42.
38. Watts, Tyler W., Greg J. Duncan, Robert S. Siegler, Pamela E. Davis-Kean (2014), "What's Past is Prologue: Relations Between Early Mathematics Knowledge and High School Achievement", *Educational Researcher*, 43(7), 352–360.
39. Watts, Tyler W., Greg J. Duncan, Douglas H. Clements, Julie Sarama (2018), "What is the long-run impact of learning mathematics during preschool?", *Child Development*, 89(2), 539–555.
40. Wijns, Nore, Bert de Smedt, Lieven Verschaffel, Joke Torbeyns (2020), "Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics?", *British Journal of Educational Psychology*, 90(3), 753–769.

EARLY MATHEMATICAL COMPETENCIES AND KEY CONTEXT FEATURES THAT PROMOTE THEIR DEVELOPMENT

Summary:

The main aim of this review is to systematize and present evidence from recent scientific studies regarding the role of early mathematical competencies in later mathematics achievement, as well as to analyze characteristics of educational and family environments that facilitate the development of these competencies in children. Presented longitudinal studies provide clear evidence that early math competencies significantly predict later mathematical outcomes. Reviewed studies also suggest that how adults and children interact in terms of mathematics activities is related to children's mathematics development. In both formal education and family environment, adults who use everyday situations and activities for reasoning, communicating, and mathematical thinking seem to be the most important factor for fostering early math competencies. These findings are also discussed in the context of BiH where most children do not attend formal early education.

Keywords: early mathematical competencies; numeracy; mathematics achievement; early math learning

Adrese autora
Authors' address

Amela Mujagić
Univerzitet u Bihaću
mujagicamela@gmail.com

Karmelita Pjanić-Lipovača
Univerzitet u Bihaću
kpjanic@gmail.com

Edin Lidan
International Burch University
edin.lidan@ibu.edu.ba

